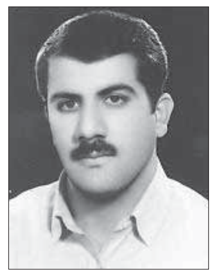
اثبات ترکیبیاتی

قضیه‌های ابن‌هیثم (ویلسون) و فرما



دکتر مرتضی بیات*
عضو هیئت علمی
دانشگاه آزاد اسلامی
واحد زنجان

زهرا خاتمی
دبیر ریاضی
ناحیه یک زنجان

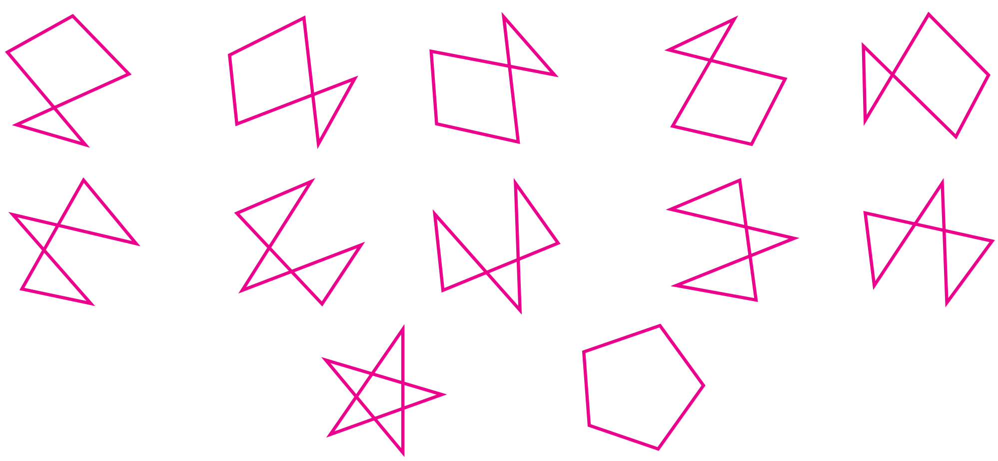
اگرچه از نظر تاریخی، اثبات «قضیهٔ **ویلســون**» به **لایب‌نیتز** (۱۶۴۶- ۱۷۱۶) و یا **لاگرانژ** (۱۷۳۶-۱۸۱۳) نسبت داده شده است، اما اثبات آن توسط **ادوارد وارینگ** در سال ۱۷۷۰ میلادی منتشر شده است. دلیل نام‌گذاری این قضیه این است که قضیه مزبور مجدداً توسط ویلسون، دانشجوی سابق ادوارد وارینگ، کشف شده است.

باید توجه کرد که این قضیه حدود ۶۰۰ سال قبل از ویلسون و نیز ۷۵۰ سال قبل از لایب‌نیتز و لاگرانژ توسط دانشمند جهان اسلام **ابن‌هیثم** کشف شد. ابن‌هیثم در نوشته‌های لاتینی به الهازن مشهور است و در زمینه‌های گوناگون، به‌ویژه نظریهٔ اعداد، مطالب ارزنده دارد (به منابع ۱ تا ۳ مراجعه کنید). در صفحهٔ ۳۲ منبع شمارهٔ ۳ از فهرست منابع مقالهٔ حاضر، این قضیه به اسم قضیهٔ ابن‌هیثم مطرح شده است. پس جا دارد در کتاب‌های ریاضی ایرانی هم به اسم او ذکر شود.

در این مقاله «اثبات ترکیبیاتی» دو قضیهٔ مشهور نظریهٔ اعداد، یعنی قضیه‌های ابن‌هیثم و فرما را به کمک نظریهٔ گراف و شمارش ارائه می‌دهیم. لازم به ذکر است که اثبات ترکیبیاتی نوعی از اثبات است که در آن برابری دو عبارت را به کمک شمارش ثابت می‌کنیم. بدین منظور نشان می‌دهیم که هر دو عبارت یک چیز را می‌شمارند. بیشتر کاربردهای این نوع اثبات در مسائل ترکیبیاتی، نظریهٔ اعداد و نظریهٔ احتمالات که با ساختارهای گسسته سرکار دارند، ظاهر می‌شوند.

قضیهٔ ابن‌هیثم: فرض کنید p یک عدد اول باشد، در آن صورت داریم:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}\ .$$

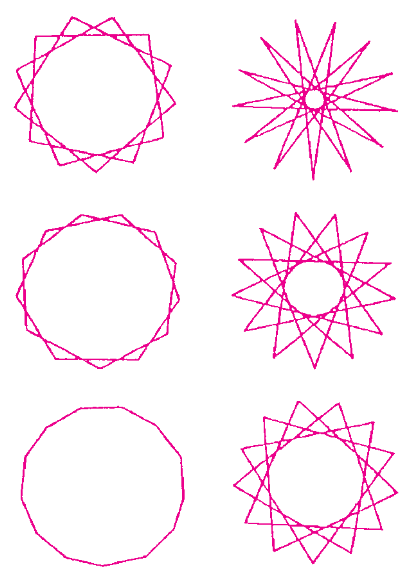


شکل ۱ دوازده ستاره‌گون پنج‌ضلعی

برهان: اگر $p=2$ باشد، آن‌گاه حکم واضح است. بنابراین فرض می‌کنیم p یک عدد اول فرد باشد. گیریم تعداد p نقطه روی محیط دایره واقع باشند، به‌طوری که دایره را به p کمان مساوی تقسیم کنند. چه تعداد چندضلعی با اتصال این نقاط می‌توان تشکیل داد؟ (برخورد یال‌ها ایرادی ندارد). این چندضلعی‌ها را به‌خاطر آنکه از اتصال رئوس یک p ضلعی منتظم محدب شکل گرفته‌اند، pضلعی‌های ستاره‌گون می‌گوییم. به‌هر حال ملاحظه می‌کنیم که هر p ضلعی را به p طریق می‌توان رسم کرد. از طرف دیگر، همهٔ pضلعی‌ها به تعداد !P طریق متفاوت قابل رسم هستند. بنابراین $\frac{p!}{2p}$ تا pضلعی ستاره‌گون متفاوت را به‌دست می‌آوریم.

شکل ۱ دوازده نوع پنج‌ضلعی ستاره‌گون را نشان می‌دهد.

در بین $\frac{p!}{2p}$ تا pضلعی، دقیقاً $\frac{p-1}{2}$ تا pضلعی وجود دارد که تحت دوران $\frac{2\pi}{p}$ رادیان تغییر نمی‌کنند. چنین p ضلعی‌های ستاره‌گونی را p ضلعی منتظم می‌گوییم. چون آن‌ها به‌صورت «ستاره» از p نقطه ساخته شده‌اند و زاویهٔ پره‌های آن‌ها $\frac{(2k+1)\pi}{p}$ برای $0 \le k < \frac{p-1}{2}$ است. در حالت $p=5$ تنها دو پنج ضلعی منتظم وجود دارد، و این در شکل ۱ در ردیف سوم نشان داده شده است. در حالت $p=13$، شش ۱۳ ضلعی منتظم وجود دارد که در شکل ۲ نشان داده شده است.



شکل ۲ شش ۱۳ضلعی منتظم ستاره‌گون

خاطر نشان می‌کنیم که $\frac{p!}{2p}-\frac{p-1}{2}$ تا p ضلعی ستاره‌گون در دسته‌های p تایی وجود دارند و عناصر هر دسته با دورانی به‌اندازهٔ $\frac{2\pi}{p}$ به‌دست می‌آیند.

اگر $p=5$ باشد، تنها دو دسته از این دسته‌ها وجود دارند (در واقع ردیف اول و دوم شکل ۱ چنین هستند). پس کل دسته‌های p تایی برابر است با:

$$\frac{\frac{p!}{2p}-\frac{p-1}{2}}{p}=\frac{(p-1)!-(p-1)}{2p}.$$

بنابراین: $2p\,|\,(p-1)!-(p-1)$ و در نتیجه $p\,|\,(p-1)!+1$ که این حکم را ثابت می‌کند.

قضیهٔ کوچک فرما: فرض کنید a یک عدد صحیح و مثبت و p عددی اول باشد، آن‌گاه داریم:

$$a^p \equiv a \pmod p.$$

اگر $(a,p)=1$، باشند با توجه به قانون حذف داریم:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod p.$$

برهان: باید ثابت کنیم $p\,|\,a^p-a$. به این منظور مهره‌هایی با a رنگ متفاوت اختیار می‌کنیم. با استفاده از آن‌ها رشته‌هایی با p مهره می‌سازیم. تعداد رشته‌های متمایز a^p است. (برای انتخاب هر مهره، p حالت داریم.) اگر a رشتهٔ تک‌رنگ را کنار بگذاریم، a^p-a رشته باقی می‌ماند. دو انتهای هر رشته را به هم وصل می‌کنیم تا یک گردنبند داشته باشیم. اگر رشته‌ها در یک جایگشت دایره‌ای با هم متفاوت باشند، گردنبندهای ایجاد شدهٔ یکسانی دارند. ولی برای یک رشته، p جایگشت دایره‌ای وجود دارد. پس تعداد گردنبندهای متمایز $\frac{a^p-a}{p}$ است. با توجه به تعبیر آن، این عدد صحیح است؛ یعنی: $p\,|\,a^p-a$.

منابع

1. G.E. Andrews, *Numbers theory*, Hindustan Publishing Corporation (india), Delhi, 1992.
2. W.S. Golomb, *Combinatorial proof of Fermat's "Little" Theorem*, The American Mathematical Monthly, Vol. **63**, No. 10 (Dec., 1956), p. 718.
3. G. Everest and T. Ward, An Introduction to Number Theory, Springer Verlag, 2005.

۴. قضیهٔ ویلسون (زنگ تفریح شمارهٔ ۲۸) (۱۳۸۶). وزارت آموزش‌وپرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. شبکهٔ ملی مدارس ایران (رشد). گزارش خبر. ۱۳۸۶.

۵. حسنی، مهدی (۱۳۹۳). **گزارش مختصری از یک پژوهش تاریخی: ابن‌هیثم و نظریهٔ اعداد**. خبرنامهٔ انجمن ریاضی ایران. شماره پیاپی ۱۳۸.

* Baayyaatt@gmail.com